OPERADORES LINEARES ESPECIAIS: CARACTERIZAÇÃO EM ESPAÇOS DE DIMENSÃO DOIS*

FABIANA BARBOSA DA SILVA, **ALINE MOTA DE MESQUITA ASSIS**, JOSÉ EDER SALVADOR DE VASCONCELOS

Resumo: *o objetivo deste artigo é apresentar uma pesquisa bibliográfica sobre alguns tipos de Operadores Lineares Especiais, suas características e propriedades, bem como caracterizá-los em espaços de dimensão dois. Inicia-se conceituando os Operadores Autoadjuntos e relatando os principais resultados, culminando com a demonstração do Teorema Espectral. Posteriormente, apresenta-se os Operadores Ortogonais finalizando com os Operadores Normais (Caso Real).*

Palavras-chave: *Álgebra Linear. Operadores Lineares Especiais. Espaços de Dimensão Dois.*

RESULTADOS INICIAIS

Precisamos dos seguintes resultados para entender os conceitos relacionados com os operadores lineares especiais.

A Adjunta

Definição 1. Seja a transformação linear $A: E \to F$, onde E e F são espaços vetoriais de dimensão finita, ambos munidos de produto interno. A *adjunta* de A é uma transformação linear $A^*: F \to E$ tal que, para quaisquer $v \in E$ e $w \in F$ se tenha

$$\langle Av, w\rangle = \langle v, A^* w\rangle.$$

Teorema 2. Sejam $\alpha = \{u_1, \dots, u_n\} \subset E$ e $\beta = \{v_1, \dots, v_m\} \subset F$ bases ortonormais. Se $[A] = [a_{ij}] \in M(m \times n)$ é a matriz da transformação

estudos, Goiânia, v. 41, n. 1, p. 32-45, jan./mar. 2014.

linear $A: E \rightarrow F$ nas bases α e β, então a matriz da adjunta A^*: F $\rightarrow$ E nas bases β e α é a transposta $[A]^T = [a_{ji}] \in M(n \times m)$ de $[A]$.
Demonstração: Essa demonstração pode ser encontrada em Lima (2011, p. 141).

Apresentamos a seguir uma lista de propriedades operacionais da adjunta de uma transformação linear, as quais correspondem às propriedades da transposta de uma matriz. A validez dessas propriedades decorre da observação de que duas transformações lineares $A, B: E \rightarrow F$ são iguais quando se tem $\langle Au, v\rangle = \langle Bu, v\rangle$ para quaisquer $u \in E$ e $v \in F$.

$i)\ I^* = I$	$vi)\ (I_n)^T = I_n$
$ii)\ (A + B)^* = A^* + B^*$	$vii)\ ([A] + [B])^T = [A]^T + [B]^T$
$iii)\ (\alpha A)^* = \alpha A^*$	$viii)\ (\alpha[A])^T = \alpha[A]^T$
$iv)\ (BA)^* = A^* B^*$	$vi)\ ([B][A])^T = [A]^T[B]^T$
$v)\ (A^*)^* = A$	$x)\ ([A]^T)^T = [A]$

Se $A: E \rightarrow F$ é uma transformação linear invertível, então $A^{-1}A = I_E$ resulta em $A^* (A^{-1})^* = I_E$, logo $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. Analogamente, uma matriz quadrada $[A]$ é invertível se, e somente se, sua transposta $[A]^T$ é invertível e, no caso afirmativo, $([A]^T)^{-1} = ([A]^{-1})^T$.

Matrizes Ortogonais

Proposição 3. A matriz $[U] \in M(m \times n)$ é ortogonal se, e somente se,

$$[U]^T [U] = I_n.$$

Demonstração: Essa demonstração pode ser encontrada em Lima (2011, p. 182).

Proposição 4. Matrizes quadradas ortogonais são aquelas cuja transposta é igual à inversa.
Demonstração: Se $[U] \in M(n \times n)$ é uma matriz quadrada ortogonal, então a igualdade $[U]^T [U] = I_n$ implica $[U]\,[U]^T = I_n$, logo $[U]^T = [U]^{-1}$.

A igualdade $[U]\,[U]^T = I_n$ significa que as linhas de $[U]$ formam um conjunto de n vetores ortonormais em $\mathbb{R}^m$. Portanto, para matrizes quadradas, colunas ortonormais equivale a linhas ortonormais.

Exemplo 5. (Caracterização das Matrizes Ortogonais 2×2) Seja

$$[U] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

uma matriz ortogonal 2×2. Como $u_1 = (a, c)$ é um vetor unitário em $\mathbb{R}^2$, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $a = cos\theta$ e $c = sen\theta$. Sendo $u_2 = (b, d)$ unitário e perpendicular a u_1, devemos ter $u_2 = \pm(-sen\theta, cos\theta)$. Assim, há duas possibilidades para a matriz $[U]$:

$$[U] = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [U] = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

No primeiro caso, tem-se $ad - bc = 1$ e no segundo $ad - bc = -1$.

No primeiro caso, o polinômio característico de $[U]$, $p(\lambda) = \lambda^2 - (2cos\theta)\lambda + 1$, não tem raízes reais salvo se $\theta = 0°$ ou $\theta = 180°$. Se $\theta = 0°$, então $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$, o qual tem uma raiz dupla $\lambda_1 = 1$. Se $\theta = 180°$, então $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$, que tem uma raiz dupla $\lambda_2 = -1$. Em ambas as situações os autoespaços são iguais $V = [(1,0), (0,1)]$ resultando, para a situação em que $\lambda_1 = 1$, que $[U] = I_2$ e, para $\lambda_2 = -1$, que $[U] = -I_2$. Portanto, neste caso temos uma matriz de rotação.

No segundo caso, $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ tem raízes $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Então o operador $U: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuja matriz na base canônica é $[U]$, admite autovetores v_1 e v_2, respectivamente. Assim, $Uv_1 = v_2$ e $Uv_2 = -v_2$. Observe que, neste caso, a matriz $[U]$ é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

que é simétrica. Logo, o operador U é a reflexão em torno do eixo que contém v_1, paralelamente a v_2.

OPERADORES AUTOADJUNTOS

Definição 6. Um operador linear $A: E \to E$, sendo E um espaço vetorial munido de produto interno, chama-se *autoadjunto* quando $A = A^*$, ou seja, quando para quaisquer $u, v \in E$ tem-se $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$.

Exemplo 7. Dados os vetores $u = (4, 4, -2)$, $v = (4, -2, 4)$ e $w = (1, -2, -2)$ seja $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que $Au = (10, -2, -2)$, $Av = (-2, 10, -2)$ e $Aw = (1, 1, -5)$. Observe que $\{u, v, w\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Pela Definição 6 basta verificar que $\langle Av_1, v_2 \rangle = \langle v_1, Av_2 \rangle$ para todas as escolhas possíveis de v_1 e v_2 dentro desta base. Assim, temos que:

$$\langle Au, v\rangle = \langle (10,-2,-2),(4,-2,4)\rangle = 36 = \langle (4,4,-2),(-2,10,-2)\rangle = \langle u, Av\rangle$$
$$\langle Au, w\rangle = \langle (10,-2,-2),(1,-2,-2)\rangle = 18 = \langle (4,4,-2),(1,1,-5)\rangle = \langle u, Aw\rangle$$
$$\langle Av, w\rangle = \langle (-2,10,-2),(1,-2,-2)\rangle = -18 = \langle (4,-2,4),(1,1,-5)\rangle = \langle v, Aw\rangle$$

provando que A é um operador autoadjunto.

A proposição a seguir mostra algumas propriedades dos operadores autoadjuntos.

Proposição 8. Se $A, B: E \to E$ são operadores autoadjuntos e $\alpha \in \mathbb{R}$ então
$i)$ $A + B$ é autoadjunto;
$ii)$ αA é autoadjunto;
$iii)$ o produto AB é autoadjunto se, e somente se, A e B comutam, ou seja, $AB = BA$.
Demonstração: Essa demonstração segue imediatamente da Definição 6.

Proposição 9. O inverso de um operador autoadjunto (invertível) também é autoadjunto.
Demonstração: Seja A um operador autoadjunto e invertível. Tomemos $A^{-1} = B$. Queremos mostrar que B também é autoadjunto. Sabemos que $AB = BA = I$, tomando adjuntas, teremos $(AB)^* = (BA)^* = I^*$. O que resulta em $B^*A^* = A^*B^* = I$. Assim B^* será a inversa de A^*, ou seja, $(A^*)^{-1} = B^* = (A^{-1})^*$. Mas, A é também autoadjunto, então $B^* = (A^*)^{-1} = A^{-1} = B$. Portanto, $B = A^{-1}$ é autoadjunto.

Exemplo 10. Sejam $A, B: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores definidos por $A(x,y) = (x, 2y)$ e $B(x,y) = (y,x)$. Sendo $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$, para todo $v = (x,y)$ temos:

$$\langle e_1, A^*v\rangle = \langle Ae_1, v\rangle = \langle (1,0),(x,y)\rangle = x$$
$$\langle e_2, A^*v\rangle = \langle Ae_2, v\rangle = \langle (0,2),(x,y)\rangle = 2y$$

Logo, $A^*v = (x,2y) = Av$ e $A^* = A$, ou seja, A é autoadjunto. Analogamente, $B^*v = (y,x) = Bv$, resultando que B é também autoadjunto. Entretanto, como $AB(x,y) = (y,2x)$, segue que $(AB)^*v = (2y,x)$ e $(AB)^* \neq AB$, ou seja, o produto AB dos operadores autoadjuntos A e B não é autoadjunto. Isto se dá porque, conforme o item (iii) da Proposição 8, $AB \neq BA$. Note ainda que A é invertível, pois $det([A]) = 2 \neq 0$, e que sua inversa é

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$A^{-1}(x,y) = \left(x, \frac{y}{2}\right).$$

Pela Proposição 9, A^{-1} é autoadjunto.

Definição 11. Uma matriz quadrada $[A] = [a_{ij}]$ diz-se *simétrica* quando é igual à sua transposta $[A]^T$, isto é, quando $[a_{ij}] = [a_{ji}]$ para todo i e todo j.

No Teorema a seguir E é um espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno.

Teorema 12. O operador $A: E \to E$ é autoadjunto se e, somente se, sua matriz $[A] = [a_{ij}]$ relativamente a uma (e, portanto a qualquer) base ortonormal $\alpha = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset E$ é uma matriz simétrica.

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned}\langle u_i, Au_j\rangle &= [i - \text{ésima coordenada do vetor } Au_j \text{ na base } \alpha] \\ &= [i - \text{ésimo elemento da } j - \text{ésima coluna de } [A]] \\ &= a_{ij}.\end{aligned}$$

Portanto, a matriz $[A]$ é simétrica se, e somente se, $\langle u_i, Au_j\rangle = \langle Au_i, u_j\rangle$ para quaisquer $i, j = 1, \ldots, n$. Devido à linearidade de A e à bilinearidade do produto interno, isto equivale a dizer que $\langle u, Av\rangle = \langle Au, v\rangle$ para quaisquer $u, v \in E$, resultando que A é autoadjunto.

Exemplo 13. As matrizes dos operadores autoadjuntos A, B *e* A^{-1} do Exemplo 10 na base canônica de $\mathbb{R}^2$ são, respectivamente,

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ [B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\ e\ [A^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

todas simétricas. Observe que, como AB não é autoadjunto, sua matriz não é simétrica.

Teorema 14. Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ são autovalores dois a dois distintos do operador autoadjunto $A: E \to E$, os autovetores correspondentes $v_1, \ldots, v_m$ são dois a dois ortogonais.
Demonstração: Como A é autoadjunto, para quaisquer $i \neq j$, tem-se:

$$\begin{aligned}(\lambda_i - \lambda_j)\langle v_i, v_j\rangle &= \langle \lambda_i v_i, v_j\rangle - \langle v_i, \lambda_j v_j\rangle \\ &= \langle Av_i, v_j\rangle - \langle v_i, Av_j\rangle \\ &= \langle Av_i, v_j\rangle - \langle v_i, Av_j\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Mas, $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$, assim, $(\lambda_i - \lambda_j)\langle v_i, v_j\rangle = 0$ resulta em $\langle v_i, v_j\rangle = 0$, ou seja, v_i é ortogonal a v_j, para $i, j = 1, \ldots, m$ e $i \neq j$.

Observação 15. Se $Av = \lambda v$ então, para todo múltiplo $w = \alpha v$, temos $Aw = \lambda w$ Logo, na situação do Teorema 14, os vetores $v_1, \ldots, v_m$ podem ser tomados unitários, caso haja conveniência.

Exemplo 16. Seja $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $A(x,y,z) = (2z,-y,2x)$. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual. Note que A é autoadjunto, pois sua matriz

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

na base canônica de $\mathbb{R}^3$ é simétrica. O polinômio característico de A é

$$p(\lambda) = (\lambda^2 - 4)(-1-\lambda)$$

que possui três raízes reais distintas, a saber, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 2$. Assim, pelo Teorema 14, os autovalores correspondentes $v_1 = (-1,0,1)$, $v_2 = (0,1,0)$ e $v_3 = (1,0,1)$ são dois a dois ortogonais. Deste modo,

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0, \quad \langle v_1, v_3 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle v_2, v_3 \rangle = 0$$

como nos assegura o Teorema 14.

Um problema importante sobre operadores num espaço vetorial de dimensão finita é o de encontrar uma base em relação à qual a matriz desse operador seja o mais simples possível. Mostraremos que, se $A: E \to E$ é um operador autoadjunto num espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, existe uma base ortonormal em E, relativamente à qual a matriz $[A] = [a_{ij}]$ é uma matriz diagonal, isto é, $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Isso é o que nos diz o Teorema Espectral.

Primeiro, vejamos o caso particular deste Teorema em que o espaço tem dimensão 2.

Teorema 17. Seja $A: E \to E$ um operador autoadjunto num espaço vetorial de dimensão 2, munido de produto interno, $\langle\, , \rangle$. Existe uma base ortonormal $\{u_1, u_2\} \subset E$ formada por autovetores de A.

Demonstração: Seja $\{v,w\} \subset E$ uma base ortonormal arbitrária. Como , podemos escrever

$$Av = av + bw \quad \text{e} \quad Aw = bv + cw,$$

uma vez que, pelo Teorema 12, a matriz de A é simétrica, a saber

$$[A] = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

cujo polinômio característico é dado por $p(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2$. O discriminante deste trinômio é $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2$, o qual deve ser maior ou igual a zero para que $p(\lambda)$ tenha raízes reais.

Se $\Delta = 0$, então $(a - c)^2 = -4b^2$, que só é verdade quando $b = 0$, o que resulta em $(a - c)^2 = 0$, ou seja, $a = c$. Assim,

$$[A] = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = aI$$

Logo, todo vetor não nulo em E é um autovetor, pois $Av = aIv = av$.

Se $\Delta > 0$, então $p(\lambda)$ possui duas raízes reais distintas λ_1 e λ_2. Assim, $det([A] - \lambda_1 I) = 0$ e $det([A] - \lambda_2 I) = 0$, resultando que $[A] - \lambda_1 I$ e $[A] - \lambda_2 I$ são ambas não invertíveis. Logo existem vetores não nulos $u_1, u_2 \in E$ tais que $([A] - \lambda_1 I)\, u_1 = 0$ e $([A] - \lambda_2 I)\, u_2 = 0$, ou seja, $Au_1 = \lambda_1 u_1$ e $Au_2 = \lambda_2 u_2$. Deste modo, $\{u_1, u_2\}$ é uma base de E. Pelo Teorema 14, $\{u_1, u_2\} \subset E$ é uma base ortonormal de autovetores de A.

Corolário 18. Todo operador autoadjunto $A: E \to E$, num espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, possui um autovetor.
Demonstração: Essa demonstração pode ser encontrada em Lang (2003, p. 167).

Teorema 19. (Teorema Espectral) Para todo operador autoadjunto $A: E \to E$, num espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno, existe uma base ortonormal $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset E$ formada por autovetores de A.
Demonstração: Usaremos indução na dimensão de E. O teorema é evidente se $dim\ E = 1$. Supondo-o verdadeiro em dimensão $n - 1$, considere $dim\ E = n$. Pelo Corolário 18, existe um autovetor unitário u_n, portanto um subespaço $F \subset E$, de dimensão 1, tal que $A(F) \subset F$. Como dim $F^{\perp} = n - 1$, pela hipótese de indução temos que existe uma base ortonormal $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\} \subset F^{\perp}$. Segue que $\{u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n\} \subset E$ é uma base ortonormal formada por autovetores de A.

Observação 20. Vale a recíproca do Teorema Espectral: se existe uma base ortonormal $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset E$ formada por autovetores do operador $A: E \to E$ então este operador é autoadjunto.

Exemplo 21. Considere o operador autoadjunto descrito no Exemplo 16. Como A possui três autovalores distintos, $\mathbb{R}^3$ possui uma base de autovalores, a saber, $\{v_1, v_2, v_3\}$, com $v_1 = (-1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 0, 1)$. Como provado no Exemplo 16 essa base é ortogonal. Pela Observação 15, podemos tomar esses
vetores unitários. Assim, como v_2 já é unitário, basta normalizar v_1 e v_3:

$$v_1' = \frac{v_1}{|v_1|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$v_3' = \frac{v_3}{|v_3|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Portanto, $\{v_1', v_2, v_3'\}$ é a base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ descrita pelo Teorema Espectral.

Caracterização dos Operadores Autoadjuntos em Espaços de Dimensão Dois sobre o Conjunto dos Números Reais.

Pela demonstração do Teorema 17 (Teorema Espectral em espaços de dimensão 2), todos os operadores autoadjuntos T em E, sendo E um espaço de dimensão dois, são dados por

$$[T_a] = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = aI, \qquad a \in \mathbb{R}$$

quando T possui um único autovalor $\lambda = a$ ou por

$$[T_{a,b}] = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

quando T possui dois autovalores distintos $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = b$.

OPERADORES ORTOGONAIS

Teorema 22. As seguintes afirmações a respeito de uma transformação linear $A: E \to F$ entre espaços vetoriais de dimensão finita munidos de produto interno, são equivalentes:
$i)$ A preserva a norma, ou seja, $|Av| = |v|$ para todo $v \in E$;
$ii)$ A preserva a distância, ou seja, $|Au - Av| = |u - v|$ para quaisquer $u, v \in E$;
$iii)$ A preserva o produto interno, ou seja, $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle$ para quaisquer $u, v \in E$;
$iv)$ $A^*A = I_E$;
$v)$ A matriz do operador A relativa a qualquer par de bases ortonormais $\alpha \subset E$ e $\beta \subset F$ é uma matriz ortogonal;
$vi)$ A matriz do operador A relativa a um certo par de bases ortonormais $\alpha \subset E$ e $\beta \subset F$ é uma matriz ortogonal;
$vii)$ O operador A transforma uma certa base ortonormal $\alpha \subset E$ num conjunto ortonormal $\gamma \subset F$. (Se $\dim E = \dim F$, então γ é uma base);
$viii)$ O operador A transforma toda base ortonormal $\omega \subset E$ num conjunto ortonormal $\mu \subset F$.
Demonstração: Essa demonstração pode ser encontrada em Lima (2011, p. 184).

Definição 23. Uma transformação linear $A: E \to F$ chama-se *ortogonal* quando cumpre uma das oito condições do Teorema 22 (e, portanto, todas elas).

Em particular, um operador linear $A: E \to E$ chama-se ortogonal quando $A^* = A^{-1}$ Assim, para que o operador linear $A: E \to E$ seja ortogonal, é suficiente que $A^*A = I_E$ ou então que $AA^* = I_E$. Em termos de matrizes, o operador A é ortogonal quando $[A]^T = [A]^{-1}$.

Exemplo 24. Em $\mathbb{R}^2$ o operador linear definido por

$$A(x,y) = \left(\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y, \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y\right), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

é ortogonal.

De fato, pois utilizando o item (iv) do Teorema 22 temos que de

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \text{ e } [A^T] = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

obtemos

$$[A]^T[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que $[A]^T = [A]^{-1}$.

Proposição 25. Os únicos autovalores possíveis para um operador ortogonal $A: E \to E$ são $+1$ e -1.

Demonstração: Como A é ortogonal, segue que $|Av| = |v|$. E como $Av = \lambda v$, com $v \neq 0$, temos que

$$|v| = |Av| = |\lambda v| = |\lambda||v|,$$

logo $|\lambda| = 1$. Portanto, $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

Proposição 26. Se u e v são autovetores do operador ortogonal A, com $Au = u$ e $Av = -v$, então $\langle u, v\rangle = 0$.

Demonstração: Com efeito, pois

$$\langle u, v\rangle = \langle Au, -Av\rangle = \langle A^*Au, -v\rangle = \langle u, -v\rangle = -\langle u, v\rangle.$$

Assim, $2\langle u, v\rangle = 0$, resultando que $\langle u, v\rangle = 0$.

Exemplo 27. Considere o $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e $A(x,y,z) = (y,x,z)$ um operador ortogonal. Sua matriz em relação à base canônica é

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seu polinômio característico é dado por $p(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(1 - \lambda)$. Então os autovalores de $[A]$ são 1 e -1, como descreve a Proposição 25, cujos autoespaços são, respectivamente, $V_1 = [(1,1,0),(0,0,1)]$ e $V_{-1} = [(-1,1,0)]$. Portanto,

$$\langle(-1,1,0),(1,1,0)\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle(-1,1,0),(1,1,0)\rangle = 0$$

como nos diz a Proposição 26.

Caracterização dos Operadores Ortogonais em Espaços de Dimensão Dois sobre o Conjunto dos Números Reais

A seguir, vamos analisar a forma de um operador ortogonal $A: E \to E$ num espaço de dimensão 2 dotado de um produto interno.

Segundo a natureza dos autovalores de A, há quatro possibilidades:

(1) A possui um único autovalor, o qual é igual a 1. Neste caso, $A = I$.

De fato, seja $u \in E$ um vetor unitário tal que $Au = u$. Se $v \in E$ é outro vetor unitário e perpendicular a u, então Av também é um vetor unitário perpendicular a u, logo $Av = \pm v$. Como A não admite o autovalor -1, então $Av = v$. Mas $\{u, v\} \subset E$ é uma base, portanto, $A = I$.

(2) A possui um único autovalor, o qual é igual a -1. Então $A = -I$.

De fato, seja $u \in E$ um vetor unitário tal que $Au = -u$. Se $v \in E$ é outro vetor unitário e perpendicular a u, então Av também é um vetor unitário perpendicular a u, logo $Av = \pm v$. Como A não admite o autovalor 1, então $Av = -v$. Mas $\{u, v\} \subset E$ é uma base, portanto, $A = -I$.

(3) A admite os autovalores 1 e -1.

Tomemos vetores unitários $u, v \in E$ com $Au = u$ e $Av = -v$, logo $\{u, v\} \subset E$ é uma base ortonormal relativamente à qual a matriz de A é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, A é a reflexão ortogonal em torno do eixo que contém o vetor u.

(4) A não possui autovalores reais.

Consideremos uma base ortonormal arbitrária $\alpha = \{u, v\}$ de E. A matriz de A nesta base, sendo ortogonal quadrada e sem autovalores, tem, segundo o Exemplo

5, a forma

$$[A] = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}.$$

É necessário verificar se θ não depende da base ortonormal α escolhida, para dizer que o operador $A: E \rightarrow E$ é a rotação de ângulo θ. Se tomarmos outra base ortonormal $\alpha' = \{u', v'\}$ de E, a nova matriz de A será $[A]' = [P]^{-1}[A][P]$, onde

$$[P] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

é a matriz de mudança de base, a qual é ortogonal, com $[P]^{-1} = [P]^{T}$. Assim,

$$[A'] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Levando em consideração a ortonormalidade das linhas e das colunas da matriz $[P]$, obtemos

$$[A'] = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

ou

$$[A'] = \begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -sen(-\theta) \\ sen(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

conforme seja $ad - bc = 1$ ou $ad - bc = -1$, respectivamente. Em outras palavras, o ângulo θ fica determinado a menos do sinal. Isto quer dizer que, num espaço vetorial de dimensão 2, munido de produto interno, faz sentido a noção de ângulo apenas em valor absoluto. Portanto, os operadores ortogonais sem autovalores (juntamente com $\pm I$) num espaço vetorial de dimensão 2 serão chamados rotações. (I I e $-I$ são respectivamente as rotações de ângulo $0°$ e $180°$ respectivamente.)

Exemplo 28. Considerando o operador do Exemplo 24, a saber,

$$A(x, y) = \left(\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y, \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y\right).$$

calculemos seus autovalores.

O polinômio característico de A é dado por $p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{8}{5}\lambda + 1$ do qual obtemos o discriminante $\Delta = -\frac{36}{25} < 0$. Portanto, A não possui autovalores reais, o que o caracteriza como uma rotação no plano.

OPERADORES NORMAIS (CASO REAL)

Definição 29. Um operador linear $A: E \rightarrow E$ chama-se *normal* quando comuta com seu adjunto, isto é, quando $AA^{*} = A^{*}A$.

Definição 30. Uma matriz quadrada $[A]$ diz-se *normal* se comuta com sua transposta, isto é, $[A]\,[A]^{T} = [A]^{T}\,[A]$.

Proposição 31. Um operador é normal se, e somente se, sua matriz relativamente a uma base ortonormal é uma matriz normal.
Demonstração: Seja A um operador normal, então sua matriz $[A]$ relativa a uma base ortonormal é, por definição, quadrada e $[A]\,[A]^{T} = [A]^{T}\,[A]$, pois a matriz de A^{*} é $[A]^{T}$. Portanto um operador é normal se, e somente se, sua matriz relativamente uma base ortonormal é uma matriz normal.

Exemplo 32. Os operadores autoadjuntos e os ortogonais são normais.

Primeiramente, consideremos A um operador autoadjunto, então $[A] = [A]^{T}$. Logo,

$$[A]\,[A]^{T} = [A]\,[A] = [A]^{T}\,[A].$$

Resultando que AA é normal. Agora consideremos AA um operador ortogonal, então, $[A]^{T}\,[A] = I$ e $[A]^{T} = [A]^{-1}$. Assim,

$$[A]\,[A]^{T} = [A]\,[A]^{-1} = I = [A]^{-1}[A] = [A]^{T}\,[A],$$

ou seja, A é normal.

Com isso, temos também que as matrizes simétricas e as ortogonais são normais.

Caracterização dos Operadores Normais em Espaços de Dimensão Dois sobre o Conjunto dos Números Reais

Considere a seguinte matriz normal 2×2:

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Temos que

$$[A][A]^{T} = \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{bmatrix}$$

e que

$$[A]^T[A] = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix}.$$

Logo $[A]$ é normal se, e somente se, $b^2 = c^2$, isto é, $b = \pm c$ e

$$ab + cd = ac + bd.$$

Se $b = c$, a matriz $[A]$ é simétrica. Caso contrário, temos $c = -b$ (com $b \neq 0$). Então, de $ab + cd = ac + bd$ resulta $b(a - d) = b(d - a)$, donde $a = d$.

Deste modo, as únicas matrizes normais 2×2 são as simétricas e as da forma

$$[A] = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Observe que se $[A] \neq [0]$ então $0 \neq r = \sqrt{a^2 + b^2}$ Logo existe um ângulo θ tal que $cos\theta = \frac{a}{r}$ e $sen\theta = \frac{b}{r}$. Então a matriz $[A]$ se escreve como

$$[A] = r\begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}.$$

Portanto, uma matriz normal 2×2 ou é simétrica ou é a matriz de uma semelhança no plano.

Exemplo 33. O operador linear $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$A(x, y, z) = (x, -y + 2z, -2y - z)$$

é tal que

$$[A][A]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = [A]^T[A].$$

Portanto, A é normal.

CONCLUSÃO

Este artigo, que foi uma pesquisa bibliográfica, apresentou três tipos especiais de Operadores Lineares: os Autoadjuntos, os Ortogonais e os Normais (Caso Real) caracterizando-os em espaços de dimensão dois. É importante destacar que todos os conteúdos estão diretamente ligados com a adjunta de um operador linear, consequentemente, com a matriz transposta, que é a matriz da adjunta e que este trabalho traz noções básicas sobre cada tema proposto, existindo ainda muitos outros resultados acerca do assunto. Uma sugestão de trabalho futuro seria caracterizar os operadores lineares Autoadjuntos, os Ortogonais e Normais (Caso Real) em espaços de dimensão 3 e 4.

SPECIAL LINEAR OPERATORS: CHARACTERIZATION IN SPACES TWO-DIMENSIONAL

Abstract: *the purpose of this article is to present a research literature on some special types of Linear Operators, their characteristics and properties as well as characterizing them in spaces two-dimensional. We start presenting the self-adjoint operators and reporting the main results, culminating in the demonstration of the Spectral Theorem. Subsequently, we present the Orthogonal Operators Operators ending with the Standard (Real Case).*

Keywords: *Linear Algebra, Special Linear operators. Spaces of Two-Dimensional Two*

Referências

BOLDRINE, José Luiz. *Álgebra linear*. 3.ed. São Paulo: Harbra, 1980.

LANG, Serge. *Álgebra linear*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003.

LIMA, Elon Lages. *Álgebra linear*. 8.ed. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária; IMPA, 2011.

STEINBRUCH, Alfredo Steinbruch; WINTERLE, Paulo. *Introdução à álgebra linear*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1997.

TEIXEIRA, Ralph Costa. *Exercícios e soluções*. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária; IMPA, 2009.

* Recebido em: 10.02.2014. Aprovado em: 22.02.2014. Agradecemos ao Núcleo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática do IFG (NEPEM/IFG) pelo apoio.

FABIANA BARBOSA DA SILVA
Licenciada em Matemática pelo Instituto Federal de Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia. *E-mail*: fabianabs_85@hotmail.com

ALINE MOTA DE MESQUITA ASSIS
Mestre em Matemática. Professora do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia *E-mail*: aline.mesquita@ifg.edu.br

JOSÉ EDER SALVADOR DE VASCONCELOS
Mestre em Matemática. Professor do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia *E-mail*: salvadordevasconcelos@yahoo.com.br