APLICAÇÕES SOBRE MATRIZES - MOVIMENTAÇÃO DE UM BRAÇO ROBÓTICO*

CARLOS GOMIDES DA COSTA, **LUIZ ÂNGELO MAREGÃO,** THAIS FACHETTI LOIOLA

Resumo: *o ensino de matemática é permeado de perguntas do tipo "Onde vou usar este conteúdo?" O presente trabalho tem a intenção de mostrar algumas das aplicações do conteúdo matrizes, apresentado aos alunos no ensino médio, dando uma ênfase maior à aplicação de matrizes na movimentação de um braço robótico, por meio dos parâmetros de Denavit e Hatenberg, o que pode tornar o conteúdo mais atrativo e motivador, levando o aluno(a) a um maior interesse pelos estudos.*

Palavras-chave: *Matemática. Matrizes. Braço Robótico. Denavit-Hatenberg.*

Além de tentar responder à pergunta, deve-se observar que, a matemática tem função de estimular o raciocínio lógico dedutivo, o que ajuda na tomada de decisões, como reflete os Parâmetros Curiculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM, 2000, p. 40):

> *A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.*

Assim, pode-se observar que a matemática deve ter um papel de grande relevância no que diz respeito à formação do ser humano, dando condições a ele de interpretar dados apresentados, relatórios, gráficos, planilhas etc. Mas essa formação passa pela desmistificação de que a matemática é uma disciplina de difícil compreensão, os conceitos e sua significação devem ser (re)construídos, como diz Moura (2005, p. 12):

> *é preciso muito mais do que informar, repetir e aplicar os conceitos em exercícios para dar vida e subjetividade à aprendizagem de matemática, é preciso destituir-se do formalismo, do rigor da linguagem, da rigidez das regras e deixar que as crianças se sintam desafiadas a terem as suas elaborações. O cuidado com a relação forma e conteúdo do conceito requer que a elaboração da linguagem esteja intimamente relacionada ao significado do conteúdo. Os conteúdos do conceito, o encontram na sua história, mas o aluno para aprendê-lo deve dar a este, significados que lhe façam sentido, caso contrário, não o compreende, apenas o memoriza e o repete de forma fragmentada de seu pensamento.*

Essa construção de conceitos e desmistificação do ensino de matemática, passa a ter mais significado, se o conteúdo for motivador, ou seja, for relevante para o aluno de forma que ele possa utilizar o conteúdo na sua vida cotidiana ou que tenha resultados aplicados, e essa relevância passa por uma reformulação no currículo de matemática, que está há muito ultrapassado, como diz D´Ambrósio (1996, p. 59):

> *É muito difícil motivar com fatos e situações do mundo atual uma ciência que foi criada e desenvolvida em outros tempos em virtude dos problemas de então, de uma realidade, de percepções, necessidades e urgências que nos são estranhas. Do ponto de vista de motivação contextualizada, a matemática que se ensina hoje nas escolas é morta. [...] Interessa à criança, ao jovem e ao aprendiz em geral aquilo que tem apelo às suas percepções materiais e intelectuais mais imediatas. [...] Quando digo 'mais imediatas' não estou me referindo apenas ao utilitário. Mas, igualmente, e acho isso muito importante, ao desafio intelectual.*

Não é objetivo deste trabalho apontar que é necessário apenas ensinar as quatro operações ou que com regra de três se resolvem todos os problemas do mundo, mas sim, buscar aplicações dos conteúdos ensinados, de forma que os mesmos se tornem mais atrativos e motivadores/desafiadores para os alunos, pois quando a motivação de aprender vem de dentro para fora. Torna-se muito mais interessante tanto para os professores, como para os alunos. De encontro a isso, Charlot (2000, p. 54) ressalta que:

> *A criança mobiliza-se, em uma atividade, quando investe nela, quando faz uso de si mesma como de um recurso, quando é posta em movimento por móbeis que remetem a um desejo, um sentido, um valor. A atividade possui, então, uma dinâmica interna. Não se deve esquecer, entretanto, que essa dinâmica supõe uma troca com o mundo, onde a criança encontra metas desejáveis, meios de ação e outros recursos que não ela mesma.*

Para tentar buscar essa motivação interna, é que devem ser associadas ao ensino de matemática na medida do possível, aplicações do conteúdo ensinado, como objetivo de motivar os alunos com tais aplicações, mostrando-lhes a utilização conteúdos no dia a dia ou com resultados práticos, palpáveis.

É notório que a matemática está presente em nosso dia a dia, e na maioria vezes, tem-se dificuldade em aplicá-la a determinados conteúdos, ou em ou palavras, o nível de conhecimentos matemáticos necessários para fazer modelagem é mais avançada do que o nível ao qual se pode aplicar o conte Logo, a chamada modelagem matemática, que é criar problemas com aq situação, torna-se inviável. Para Edwards e Hamsom (1990, p. 277), um mode uma forma simplificada de representar determinados aspectos de um sistema re Swetz (1992, p. 45) estende esse conceito para modelo matemático, quand princípios do modelo teórico têm uma base matemática, diz-se que se criou modelo matemático. Já Skovsmose (1990, p. 765) aponta os modelos matemá como argumentos que servem à tomada de decisões.

DEFINIÇÃO DE MATRIZES

Uma matriz pode ser definida como sendo uma coleção de objetos (valo organizados em forma de filas, que são chamadas de linhas e colunas. Para cada desses objetos é indicado uma linha e uma coluna a qual ele pertence, se representado como *i* sendo linha e *j* coluna.

Para Gentil (1998, p. 120), "O crescente uso dos computadores tem feito que a teoria sobre matrizes encontre cada vez mais aplicações em setores tais c Economia, Engenharia, Matemática, Tecnologia etc." O que abre horizontes cálculos mais avançados com o uso da tecnologia.

A obra *Nove capítulos sobre a arte matemática*, que data de 250 a.C. é uma mais antigas obras que traz o desenvolvimento da teoria sobre matrizes, mas define suas operações como adição e multiplicação. Essas definições foram f pelo estudante inglês Arthur Cayley (1821 - 1895), o que impulsionou a formaçã que se chama de Álgebra Matricial.

De forma geral, as matrizes são representadas por letras maiúsculas e elementos por letras minúsculas acompanhadas de índices que representam a linh e a coluna (j) em que elas estão. Assim, uma matriz C do tipo m x n, ond representa a quantidade de linhas e n a quantidade de colunas da matri representada por:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

, outra representação pode ser C = $[c_{ij}]_{m}$

Foram definidas operações, como adição, subtração e multiplicação alén propriedades operatórias, e também matrizes especiais para as mais dive aplicações. Abordar-se-á apenas a multiplicação pois, essa operação é que define os parâmetros de Denavit-Hatenberg.

Cada um dos elementos da multiplicação entre duas matrizes se dá pelo somatório dos produtos dos elementos correspondentes a i-ésima linha da primeira matriz e a j-ésima coluna da segunda matriz. Dada essa relação, a condição necessária e suficiente para que a multiplicação exista, é que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda matriz.

Ou seja, sendo as matrizes $A_{m \times p}$ e $B_{p \times n}$ e C = A.B, tem-se que $C_{m \times n}$. Nota-se um fato importante que A.B • B.A, pois o produto B.A não está definido, pois m • p.

APLICAÇÕES

Especificamente sobre o conteúdo matrizes, têm-se dificuldades em modelar certos problemas, pois na maioria das vezes, exige-se um conhecimento mais apurado sobre esse assunto.

Porém, algumas aplicações de matrizes são consideradas simples, pois basta aplicar conceitos e propriedades e a modelação logo está completa. A criptografia, segundo Lima (2014, p. 01) é a ciência que estuda as formas e técnicas de cifrar informações, ou seja, torná-las ininteligíveis aos que não tem acesso às convenções previamente combinadas ou os chamados códigos chave. Usando matrizes para codificar e decodificar uma mensagem, deve-se definir um par de matrizes sendo a matriz (A) e sua inversa (A^{-1}), sendo que todos seus elementos são números inteiros.

A Matriz de Leslie ou modelo de Leslie, é mais uma das inúmeras aplicações de matrizes, que é muito utilizada para descrever o crescimento da população, designadamente estudar o crescimento populacional, ou seja, projetar a população e calcular o valor reprodutivo que é feito com os modelos matriciais. Essa população é dividida em grupos separados por faixas etárias e associados a matrizes.

A Cadeia de Markov ou Processo de Markov$\{X_t\}$ é um processo estocástico que, dado o valor de X_t, os valores de X_s para s > t não são influenciados pelos valores de X_u, onde u < t. Ou seja, esse processo independe dos valores anteriores obtidos. A análise de uma Cadeia de Markov, tem como principal característica o cálculo das probabilidades de transição em n passos $\{P^{(n)}\}$. Então, têm-se as matrizes do tipo $P^{(n)} = \| P_{ij}^{n} \|$, onde i e j representam a passagem do estado i para j.

Existe uma infinidade de aplicações que poderiam ser citadas aqui, mas será dada uma ênfase para a determinação do modelo de Denavit-Hatenberg, que associa a obtenção de parâmetros para movimentação e determinação da posição final de um braço robótico definido pelo produto de matrizes.

Para obter esses parâmetros, é necessário apresentar alguns conceitos de física e robótica, pois todos estão interligados.

CINEMÁTICA DIRETA

Cinemática é o ramo da física que se ocupa da descrição dos movimentos dos corpos, sem se preocupar com suas causas.

Aqui, será enfatizado o conceito de cinemática direta que trata do controle da posição, velocidade, aceleração e todas as situações que relacionarem com a posição de um manipulador ou ferramenta (garra, guincho, braço mecânico) no espaço. A partir da fixação de sistemas de referências em todas as juntas do manipulador, podemos traçar trajetórias, controlar movimentos, determinar um espaço de trabalho possível, e sua posição final, considerando algumas variáveis, tais como: juntas, posição, ângulo, orientação da ferramenta e determinar uma relação entre elas.

O resultado da cinemática direta de um braço robótico é diferente para cada tipo de robô, pois a cada par de elos, é conectado por juntas que podem ser prismáticas ou de revolução, com medidas diferentes, o que resultará em movimentos e posições finais diferentes.

Todo braço robótico é um conjunto de elos conectados em cadeia, por juntas que fazem conexão entre par de elos vizinhos, esses são numerados a partir da base, ou parte imóvel do braço, que é numerado como elo 0. Elo é considerado apenas um corpo rígido, que tem atributos como, material, resistência, peso etc, que define a relação entre os eixos de duas juntas vizinhas de um braço robótico, onde os eixos das juntas são linhas no espaço ou vetores de direção, em torno do qual o elo i, rotaciona em relação ao elo i -1.

Tomando como base dois eixos no espaço tridimensional, podemos obter um segmento de reta perpendicular aos dois eixos simultaneamente ligando o eixo i -1 ao eixo i, ao longo do qual obtemos a medida do elo, que é definido como a_{i-1}. Projetando os eixos i – 1 e i, no plano normal, que corresponde ao segmento de medida a_{i-1}, obtemos o ângulo a_{i-1}, por ser medido em torno do eixo i – 1, que representa a torção do elo.

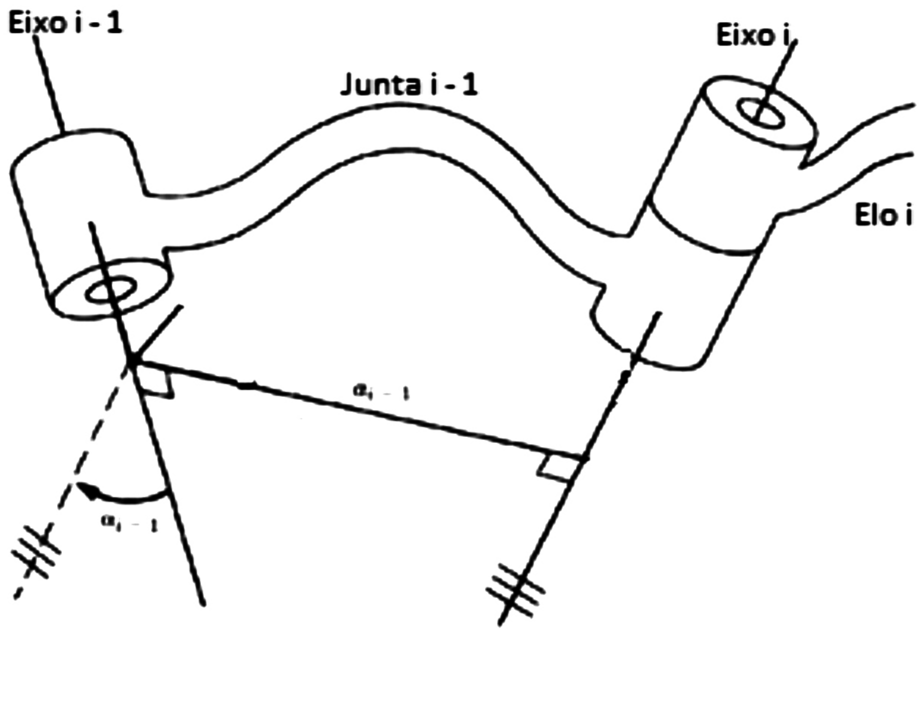

Figura 1: Junta e eixos

DESCRIÇÃO DA CONEXÃO DE ELOS

Os elos intermediários da cadeia têm um eixo de junta comum aos dois. A distância de um elo para o próximo da cadeia é denominada deslocamento de elo e é representada por d_i, por se tratar do deslocamento em relação ao eixo i. Esse deslocamento gera uma rotação em torno desse eixo comum, que, por conseguinte, forma um ângulo chamado q_i.

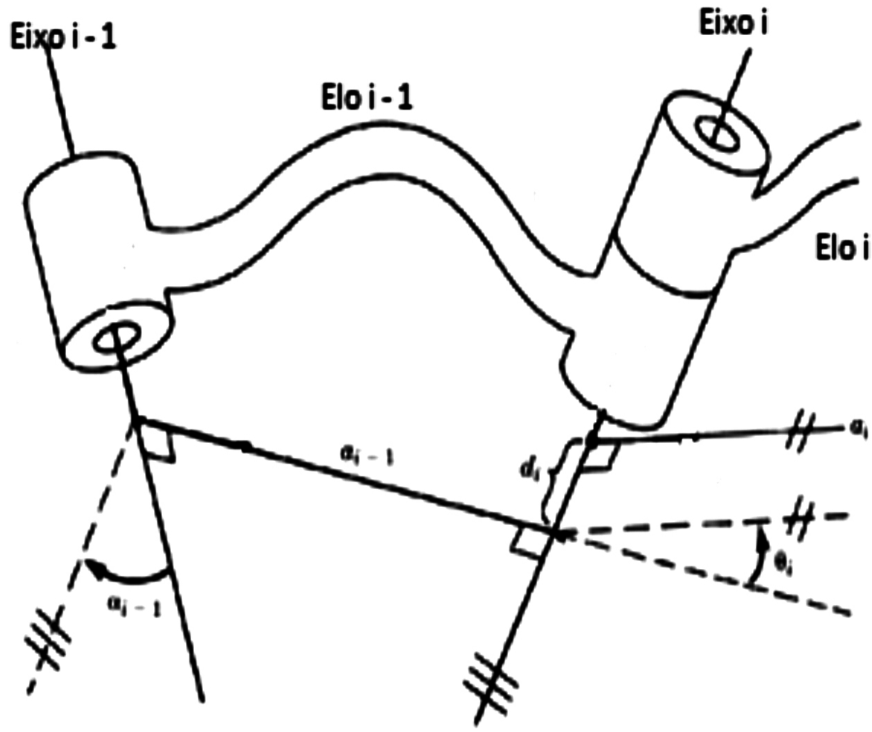

Figura 2: Conexão de elos

Analisando o primeiro e o último elo da cadeia, pode-se obter as seguintes conclusões:

- O comprimento de elo (a_i) e a torção (a_i) dependem dos eixos de juntas i e i + 1.
- Por convenção, nas extremidades da cadeia tem-se: $a_0 = a_n = 0,0$ e $d_0 = d_n = 0,0$
- Os deslocamentos de elo (d_i) e o ângulo de junta θq_i estão bem definidos de 2 a n -1 juntas.
- Sendo a junta do tipo rotacional, a posição zero para θq_i é escolhida arbitrariamente e o deslocamento de elo $d_i = 0$.
- Sendo a junta do tipo prismática, a posição zero para d_i, escolhida arbitrariamente e θ $q_i = 0$.

Para cada elo da cadeia de um braço robótico, assim como, de qualquer manipulador robótico, temos 4 valores que são fundamentais para determinar sua área de trabalho. Esses valores são identificados de forma que dois deles estão no elo analisado e os outros dois nas conexões com os elos vizinhos. São eles: o comprimento do elo (a_i), a torção do elo (a_i), o deslocamento do elo (d_i) e o ângulo de junta θ q_i. Esses são os parâmetros utilizados na Notação de Denavit-Hartenberg, para a determinação dos movimentos de um braço robótico.

CONVENÇÃO PARA FIXAÇÃO DOS SISTEMAS DE REFERÊNCIA AOS ELOS

Para cada elo da cadeia, deve-se fixar um sistema de referência, que deve ser identificado de acordo com o elo em que está fixado, ou seja, o sistema de referência { i } deve estar rigidamente ficado no elo i. Daí tem-se que o eixo $\hat{Z}$, fixado no sistema { i } será denominado $\hat{Z}_i$ e deve ser coincidente com o eixo da junta i. O eixo $\hat{X}$ é fixado ao longo de a_i na direção da junta i para a junta i + 1 e o eixo $\hat{Y}$ é determinado pela Regra da Mão Direita, para completar o i-ésimo sistema de referência.

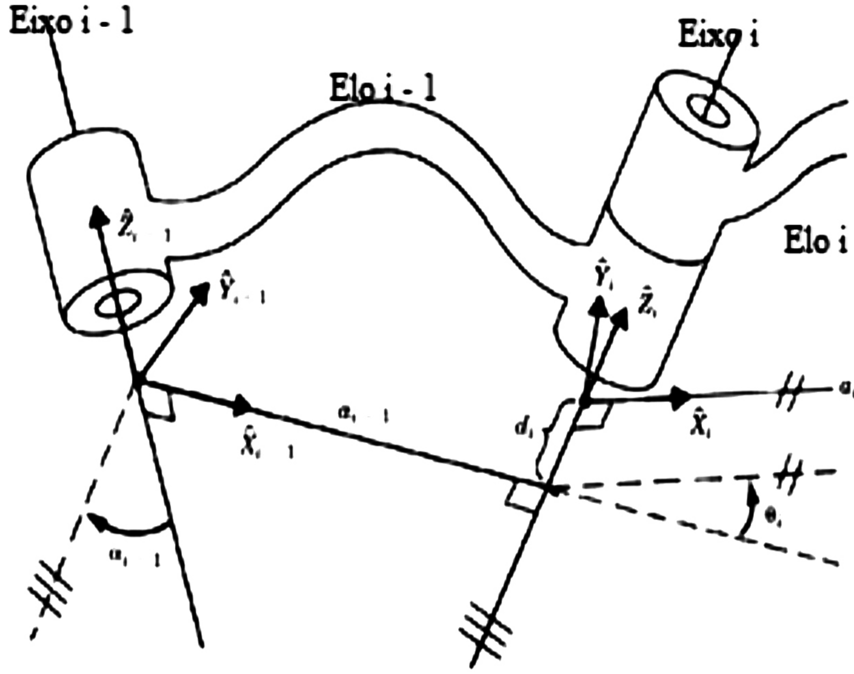

Figura 3: Elos intermediários da cadeia

Sendo os sistemas de referência dos elos, fixados de acordo com a convenção, as seguintes definições de parâmetros dos elos serão válidas:

- a_i é a distância entre $\hat{Z}_i$ e $\hat{Z}_{i+1}$, que é medida ao longo do eixo $\hat{X}_i$.
- a_i é o ângulo de $\hat{Z}_i$ e $\hat{Z}_{i+1}$, que é medida ao longo do eixo $\hat{X}_i$.

- d_i é a distância de $\hat{X}_{i-1}$ a $\hat{X}_i$, que é medida ao longo do eixo $\hat{Z}_i$.
- q_i é o ângulo de $\hat{X}_{i-1}$ a $\hat{X}_i$, que é medida ao longo do eixo $\hat{Z}_i$.

Assim sendo, pode-se determinar um procedimento para fixar o sistema de referência.

1. Identifique os eixos das juntas e desenhe retas ao longo deles. Para as etapas 2 até 5, considere duas dessas retas vizinhas, ou seja, pertencem aos eixos i e i + 1, por exemplo.
2. Identifique a perpendicular comum entre eles ou o ponto de intersecção. Atribua a origem do sistema de referência do elo ao ponto de intersecção ou ao ponto onde a perpendicular comum, encontra-se com o i-ésimo eixo.
3. Defina o eixo de $\hat{Z}_i$ apontando ao longo do i-ésimo eixo de junta.
4. Defina o eixo $\hat{X}_i$ apontando ao longo da perpendicular comum.
5. Defina o eixo $\hat{Y}_i$ para completar o sistema de coordenadas, utilizando a regra da mão direita.
6. Atribua { 0 } para que se equipare a { 1 } quando a primeira variável de junta for zero. Para { n }, escolha uma localização para a origem e direção $\hat{X}_n$, livremente, em geral de forma que o máximo possível de parâmetros de acoplamento seja b{ 0 }.

Exemplo: Braço planar de três elos, com três juntas rotacionais - Mecanismo RRR (3R).

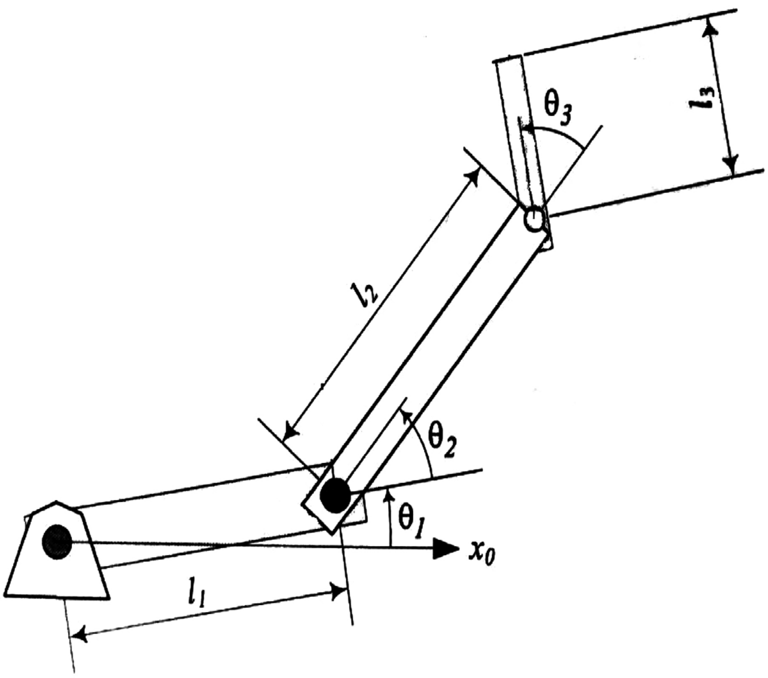

Figura 4: Mecanismo do tipo 3R

Atribuindo o sistema de referência aos elos do mecanismo e definindo os parâmetros de Denavit-Hatenberg, tem-se:

- Definir o sistema de referência fixo { 0 }: fixo na base se alinha com sistema de referência { 1 }, quando a primeira variável de junta (q_1) é zero.
- Posicionar { 0 } como na figura 2 com $\hat{Z}_0$ alinhado com o eixo de junta l.
- Para esse braço, todos os eixos de junta são orientados de modo perpendicular ao plano do braço.
- Como este braço situa-se num plano com todos os $\hat{Z}$ paralelos, não há deslocamento de elo, ou seja, todos os d_i são iguais a zero.
- Todas as juntas são rotacionais então em 0º, todos os eixos se alinham.
- Como os eixos juntas são paralelos, então os eixos $\hat{Z}$ estão apontados para fora do papel, ou seja, $a_i = 0$.

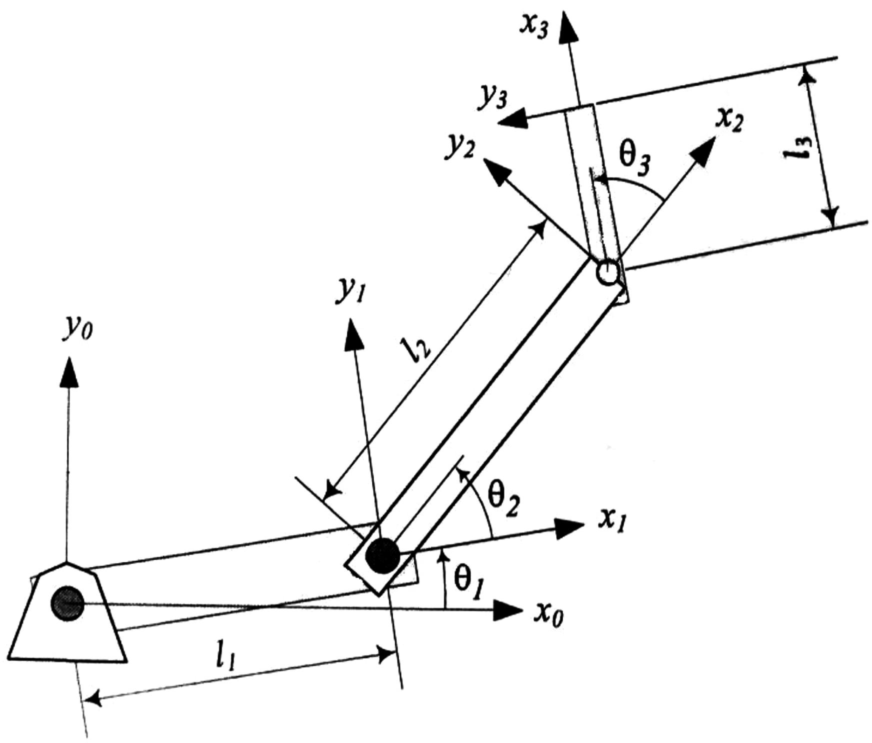

Figura 5: Colocação do sistema de referência, no mecanismo do tipo 3R

Analisando a figura 3, obtêm-se a seguinte tabela de parâmetros.

Tabela 1**:** Parâmetros obtidos do mecanismo 3R

I	a_{i-1}	a_{i-1}	d_i	q_i
1	0	0	0	q_1
2	0	l_1	0	q_2
3	0	l_2	0	q_3

Pelo prisma da cinemática, temos pelo entendimento de que sempre vai terminar em um sistema de referência, cuja origem está no último eixo de junta. Temos ainda que l_3 não aparecerá nos parâmetros de elos.

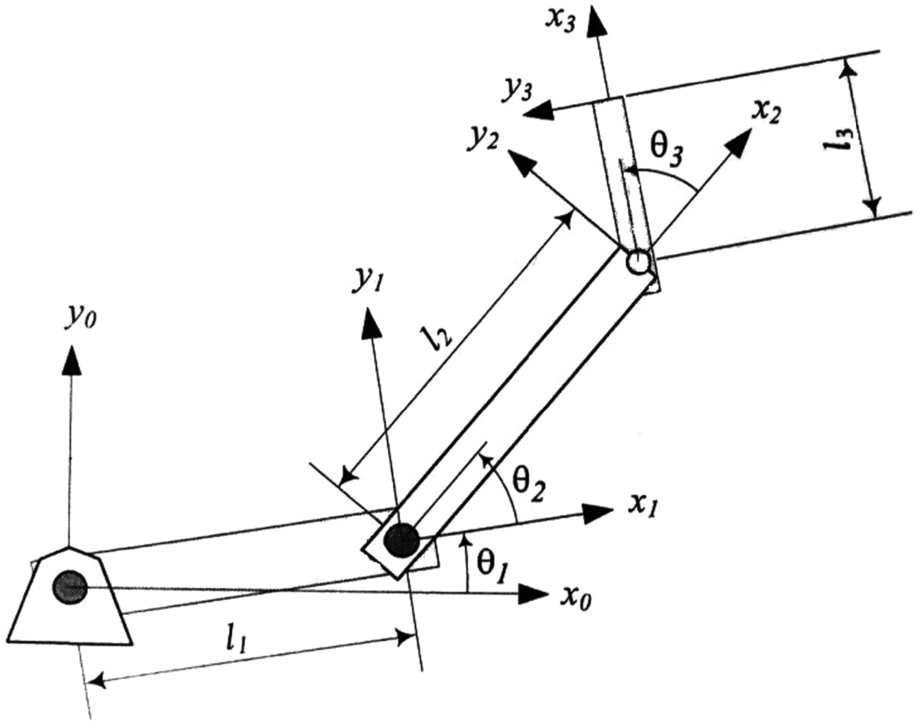

Figura 6: Colocação do sistema de referência, no mecanismo do tipo 3R

A CINEMÁTICA DOS MANIPULADORES

De forma geral, a transformação que relaciona os sistemas de referências fixados a elos vizinhos produz uma ligação entre as transformações individuais para encontrar a posição e a orientação do elo n com relação ao elo 0. Para se construir a transformação que define o sistema de referência { i } em relação ao sistema de referência { i – 1 }, deve-se determinar os quatro parâmetros dos elos, a_i, d_i, a_i e q_i.

Para um dado Robô, a transformação se torna apenas função de uma variável, pois todas as outras são fixadas pelo próprio projeto do Robô. Para cada um dos sistemas de referência que são fixados para cada elo, são encontrados n subproblemas ${}^{i-t}_{i}T$ e cada um deles é desmembrado em quatro outros problemas, onde só existe a dependência de apenas um parâmetro.

Define-se ainda, três sistemas de referência intermediários para cada elo: { P }, { Q } e { R }.

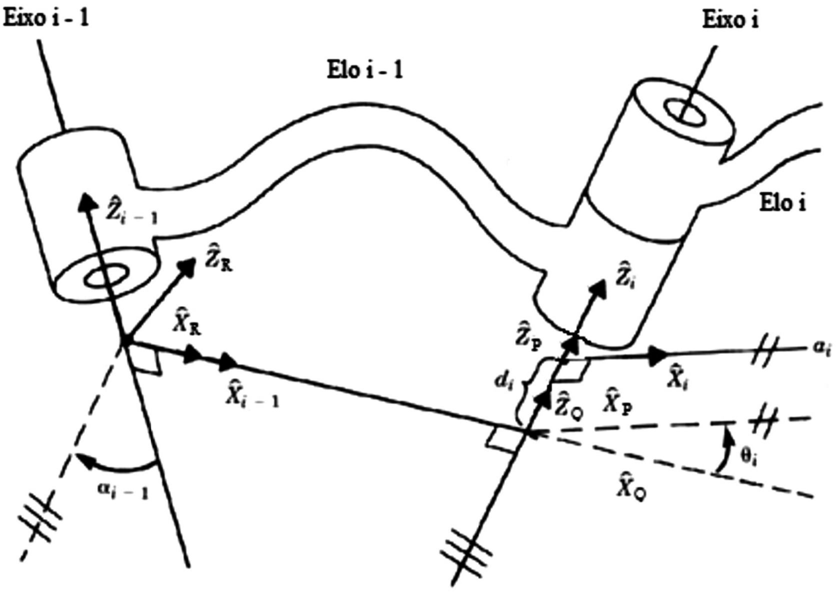

Figura 7: Colocação do sistema de referência intermediário

Os eixos $\hat{X}$ e $\hat{Z}$ são apresentados de forma que possa ficar mais claro a demonstração dos passos do projeto e todo seu sistema de orientação. A partir disso, obtém-se as seguintes considerações:

- { R } difere de { i – 1 } somente por uma rotação de a_{i-1}.
- { Q } difere de { R }, por uma translação a_{i-1}.
- { P } difere de { Q }, por uma rotação q_i.
- { i } difere de { P }, por uma translação d_i.

Dessa forma, temos que a transformação que os vetores de { i } para { i – 1 } é:

${}^{i-1}P = {}^{i-1}_{R}T \cdot {}^{R}_{Q}T \cdot {}^{Q}_{P}T \cdot {}^{P}_{i}T \cdot {}^{i}P$, onde ${}^{i-1}_{i}T = {}^{i-1}_{R}T \cdot {}^{R}_{Q}T \cdot {}^{Q}_{P}T \cdot {}^{P}_{i}T$, onde essa transformação é data pelo produto de matrizes quadradas de ordem 4, assim sendo, a resultante também será uma matriz quadrada de ordem 4, que pode ser reescrita na forma expandida por:

$$
{}^{i-1}_{i}T = \left[\begin{array}{lll} \cos\theta_i & -\mathrm{sen}\theta_i & 0 \\ \mathrm{sen}\theta_i \cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \cos\alpha_{i-1} & -\mathrm{sen}\alpha_{i-1} \\ \mathrm{sen}\theta_i \,\mathrm{sen}\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \,\mathrm{sen}\alpha_{i-1} & -\cos\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right.
$$

Que é a matriz dos parâmetros de Denavit e Hatenberg, que determina a movimentação e a posição final de um braço robótico. Do tipo 3R, ou seja, três juntas rotacionais, que determinará a posição final do braço robótico, quando forem atribuídos os parâmetros.

CONCLUSÃO

Conclui-se, então que, a movimentação e o posicionamento de um braço robótico além de ser interdisciplinar, trabalham-se também os conceitos de Física, na parte de Cinemática Direta. É mais uma aplicação no ensino de matrizes que pode ser utilizada, como ferramenta para motivar os alunos a participar das aulas e se interessar mais pelo conteúdo.

Nota-se que com um pouco de determinação e pesquisa, é possível trabalhar conteúdos ditos de difícil modelação matemática, de forma a fazer com que o interesse dos alunos pelo estudo venha de dentro para fora, tornando-se assim mais prazeroso o estudo.

APPLICATIONS ABOUT MATRIX - MOVEMENT OF A ROBOTIC ARM

Abstract: *the teaching of math is permeated of question like "where am i going to use this content?" and this work has the intention of showing some aplications of the matrices content, submitted to the students of high school, giving more emphasis to the aplication of matrix on the movimentation of the robotic arm by the parameters of Denavit and Hatenberg. And this can become the most atractive and motivational content ever, giving more interest for the study.*

Keywords: *Math. Matrices. Robotic Arm. Denavit-Hatenberg.*

Referências

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais/ Ensino Médio. Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, 2000.

CHARLOT, Bernard. *Da relação com o saber*: elementos para uma teoria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação Matemática*: da teoria à prática. Campinas, SP: Papirus, 1996.

EDWARDS, D; HANSOM, M. *Guide Modelling.* Boca Ratom: CRC Press, 1990.

GENTIL, Nelson; SANTOS, José C. A. M. dos; BELLLOTTO, Antonio. *Matemática para o T grau — T grau*: volume 2. São Paulo: Mica, 1998.

LIMA, Guilherme Frederico. Introdução à Criptografia e ao Código Rsa. DFisponível em: <http://www.mat.puc-rio.br/arquivos/0405Hacon_Silva.pdf>. Acesso em: 14 abr. 2014.

MOURA, Anna Regina Lanner de. A Linguagem Matemática como Síntese da Forma e Conteúdo do Conceito. In: 15º CONGRESSO DE LEITURA DO BRASIL. *Anais*... Campinas, 2005.

SWETZ, Frank J .The Sea Island Mathematical Manual: Surveying and Mathematics in Ancient China. Paperback, 1992)

SKOVSMOSE, O. Reflexive Knowledge: its relations to the mathematical modeling process. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.,* London, v. 21, n. 5, p. 765-779, 1990.

* Recebido em: 05.02.2014. Aprovado em: 28.02.2014.

CARLOS GOMIDES DA COSTA
Mestrando em Matemática na Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão.
E-mail: carlos.costa@ifg.edu.br.

LUIZ ÂNGELO MAREGÃO
Mestre em Educação pela Pontifícia Universidade Católica de Goiás.
E-mail: luiz.marengao@ifg.edu.br"

THAIS FACHETTI LOIOLA****.
Mestra em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. *E-mail*: thais.loiola@ifg.edu.br